CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES DES TRAVAUX PUBLICS DU BÂTIMENT DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1996

DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

SUJET 1

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $J(n) = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^n t}$.

1 ***Prouver*** que $J(1) = \ell n(1+\sqrt{2})$.

2 Grâce à une intégration par parties, ou autrement, établir que l'expression $(n+1)J(n+2) - nJ(n)$ est une suite u_n très simple, que l'on précisera.

3 Par un changement de variable $x = \varphi(t)$, ***à préciser***, démontrer que $J(n) = \frac{u_n}{2} L(n)$, où

$$L(n) = \int_0^{\ell n 2} e^{-\frac{n}{2}x} f(x)\,dx \ , \text{ avec } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x} - 1}} \ .$$

4 Démontrer la ***convergence***, puis ***calculer*** la valeur de $K = \int_0^{\ell n 2} f(x)dx$.

5 Montrer que $J(n) \sim \frac{2^{n/2}}{n}$. [***Suggestion***: introduire $A(n) = \int_0^{\delta_n} e^{-\frac{n}{2}x} f(x)\,dx$ et $B(n) = \int_{\delta_n}^{\ell n 2} e^{-\frac{n}{2}x} f(x)\,dx$, où $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; avec la monotonie de f, ***prouver*** que $L(n) \sim A(n) \sim \frac{2}{n}$.]

SUJET 4

Dans le **R**-espace vectoriel E_n des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$, on considère les polynômes $A_k = A_k(x) = x^k$, et $B_{n,k} = B_{n,k}(x) = (x+1)^{n-k}(x-1)^k$, où $k = 0,1,2,\ldots,n$.

1 Établir que $A_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} B_{n,k}(x)$, où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

2 Soit $B_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j A_j(x)$ la décomposition de $B_{n,k}$ dans la base (A_j). En posant $x = \frac{1+y}{1-y}$, ***ou autrement***, montrer que $A_k = \sum_{j=0} \lambda_j B_{n,j}$, où $\boxed{\lambda_j}$ s'exprime très simplement en fonction de μ_{n-j}.

3 Le résultat précédent étant au besoin admis, prouver que les polynômes $B_{n,k}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$, constituent une ***base*** de E_n.

4 Soit $P(x) = (x-a)(x-b)$ un polynôme du second degré, de racines a et b. Exprimer en fonction de a et b les coordonnées $\boxed{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2}$ de $P(x)$ dans la base des $(B_{2,j})$, $P(x) = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j B_{2,j}(x)$.

5 On se donne maintenant $Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$, les racines a_k étant ***toutes réelles et situées dans le segment*** [-1;1]. Montrer que les coordonnées δ_j de Q dans la base des $B_{n,j}$ sont toutes ≥ 0, et de somme égale à 1. (En d'autres termes, on peut dire que de tels polynômes Q sont dans l'***enveloppe convexe*** des $B_{n,j}$.)
[***Suggestion***: le changement de variable du 2 peut encore servir...]

SUJET 5

Soit f une fonction C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et $\Phi(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$. Vérifier que $\Phi(x,y) = \int_0^1 f'(x(1-t)+yt)\,dt$, où $f'(u)$ désigne la dérivée de $f(u)$.

1 Déterminer la valeur $\boxed{L(a)}$ de $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \Phi(x,y)$.

2 Exprimer l'intégrale $\boxed{I_{p,q}} = \int_0^1 (1-t)^p t^q dt$, p et q entiers ≥ 0, au moyen de factorielles.

3 En déduire une expression simple de $\boxed{L_{p,q}(a)} = \frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p . \partial y^q}(a,a)$.

4 Soit g une fonction C^∞ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, et $\Psi(x,y) = \frac{g(y,x)-g(x,y)}{y-x}$ si $x \neq y$. Démontrer que $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \Psi(x,y) = C.\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) + D.\frac{\partial f}{\partial y}(a,a)$, où $\boxed{C}$ et $\boxed{D}$ sont des constantes à préciser.

5 Calculer $\boxed{\xi(a)} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{x^y - y^x}{e^{x/y} - e^{y/x}}$, où $a > 0$.

SUJET 2

Soient $a_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$, $b_n = \exp(-\sqrt{n})$, n entier ≥ 1, et $f(x) = \exp(-\sqrt{x})$, x réel ≥ 0.

1 Démontrer la convergence de la série Σb_n.

2 Donner pour a_n un équivalent simple, et conclure quant à la nature de la série Σa_n.

3 Calculer $I_n = \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

4 En déduire des équivalents simples des restes $A_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p$ et $B_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} b_p$.

5 Soit u_n une suite positive de limite infinie, et $v_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u_n}}\right)^{u_n}$. Que dire de Σv_n ?

SUJET 3

Soit $(\wp)$ la parabole d'équation $y = x^2$ en base orthonormée. A tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $(\wp)$, avec $x_0 \neq 0$, on associe $M_1(x_1, y_1)$ de $(\wp)$, qui est l'intersection avec $(\wp)$ de la normale en M_0 à $(\wp)$, $M_0 \neq M_1$. On appellera aussi $H_0 = H_0(0, h_0)$ l'intersection de la droite (M_0M_1) avec l'axe (Oy). On désigne enfin par f l'application de l'intervalle $]0; +\infty[$ dans lui-même telle que $y_1 = f(y_0)$.

1 Faire une figure, et montrer que $h_0 - y_0$ est une certaine constante C à préciser.

2 Établir que $y_1 = y_0 + 1 + \frac{1}{4y_0}$ $(= f(y_0)\ldots)$.

Quel est l'ensemble E_1 des valeurs prises par y_1 quand $y_0 > 0$ varie?

3 On définit la suite (y_n) par $y_n = f(y_{n-1})$, $n \geq 1$. Démontrer que (y_n) tend vers $+\infty$.

4 Prouver que $y_n \sim Dn$, ou D est une constante à déterminer. [*Citer* le théorème utilisé.]

5 Plus précisément, établir l'***existence*** d'un réel $G(y_0)$, dépendant de y_0 et indépendant de n, pour lequel on a $y_n = Dn + \frac{1}{4}\ell n(n) + G(y_0) + o(1)$, pour $n \to +\infty$.